Prawo powszechnego ciążenia

Między dowolną parą ciał posiadających masy pojawia się siła przyciągająca, która działa na linii łączącej ich środki mas, a jej wartość rośnie z iloczynem ich mas i maleje z kwadratem odległości.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{1}$$

gdzie: F oznacza siłę przyciągającą, G oznacza stałą grawitacji, m_1, m_2 są masami dwóch przyciągających się ciał, r jest odległością pomiędzy środkami mas obu ciał

Stała grawitacji została uznana za jedną z podstawowych stałych fizycznych. Z pomiarów wynika, że jej wartość wynosi:

$$G \approx 6.6732(\pm 0.0031) \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2} \tag{2}$$

Zadanie 2.5 Oblicz, jaką siłą przyciągają się Ziemia i Księżyc, wiedząc, że masa Ziemi $m_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg, masa Księżyca $m_K = 7.3 \cdot 10^{22}$ kg, a średnia odległość pomiędzy środkami mas Ziemi i Księżyca wynosi $R = 3.8 \cdot 10^8$ m.

Rozwiązanie Masę Ziemi i masę Księżyca oraz odległość pomiędzy środkami ich mas należy podstawić do wzoru wyrażającego prawo powszechnego ciążenia (1).

$$\begin{aligned} F = G\frac{m_Z m_K}{R^2} = \\ = 6.6732 \cdot 10^{-11}\frac{6 \cdot 10^{24} \times 7.3 \cdot 10^{22}}{(3.8 \cdot 10^8)^2}\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2} = \\ 20.24142 \cdot 10^{19}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2} = 20.24142 \cdot 10^{19}\ \mathrm{N} \end{aligned} \tag{3}$$

Ponieważ w równaniu (3) stosowaliśmy jednostki SI, otrzymany wynik podaje siłę w newtonach oznaczanych symbolem N. Jeden newton to siła, która masie jednego kilograma nadaje przyspieszenie jednego metra na sekundę do kwadratu.

Zadanie 2.6 Jaką siłą przyciągają się grawitacyjnie dwa protony odległe od siebie o $r = 10^{-10}$ m? Masa protonu $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg. Porównaj otrzymany wynik z siłą przyciągania grawitacyjnego Ziemi i Księżyca.

Rozwiązanie Masę protonu m_p oraz odległość r pomiędzy środkami dwu protonów podstawiamy do równania wyrażającego prawo grawitacji (1).

$$\begin{aligned} F = G\frac{m_p m_p}{r^2} = \\ = 6.6732 \cdot 10^{-11} \frac{1.67 \cdot 10^{-27} \times 1.67 \cdot 10^{-27}}{(10^{-10})^2} \\ = 18.611 \cdot 10^{-45}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2} \\ = 18.611 \cdot 10^{-45}\ \mathrm{N} \end{aligned} \tag{4}$$

Siła przyciągania Ziemia-Księżyc jest około 10^{64} razy większa od siły przyciągania się dwu protonów odległych o 10^{-10} metra.

Zadanie 2.7 Dwie jednorodne kule, każda o promieniu $r = 1$ m, wykonane z tego samego materiału, stykają się. Ile razy zmaleje wartość siły przyciągania grawitacyjnego między tymi kulami, jeżeli rozsuniemy je na odległość $l = 1$ m?

Rozwiązanie Do obliczeń wykorzystujemy prawo grawitacji dane równaniem (1). Początkowo odległość pomiędzy środkami mas obu kul wynosi 2 metry ponieważ każda z kul ma promień jednego metra i kule stykają się. Po rozsunięciu kul na odległość jednego metra, odległość pomiędzy środkami mas tych kul wynosi 3 metry.

$$F_1 = G\frac{m \cdot m}{(2r)^2} = \frac{1}{4}G\frac{m^2}{r^2} \tag{5}$$

$$F_2 = G\frac{m \cdot m}{(3r)^2} = \frac{1}{9}G\frac{m^2}{r^2} \tag{6}$$

Stąd

$$F_1 : F_2 = \frac{1}{4} : \frac{1}{9} = \frac{9}{4} = 2.25 \tag{7}$$

Siła przyciągania grawitacyjnego pomiędzy kulami zmaleje 2.25 razy.

Mimośrodem e elipsy nazywamy iloraz odległości c ogniska od środka elipsy przez długość półosi wielkiej a

$$e = \frac{c}{a} \tag{8}$$

Peryhelium, perihelium (zlatynizowany wyraz pochodzenia greckiego, od greckiego *peri,* przy i *helios,* Słońce) to punkt na orbicie ciała niebieskiego obiegającego Słońce, znajdujący się w miejscu największego zbliżenia obu ciał. Przeciwieństwem peryhelium jest aphelium.

Zadanie 2.8 Jedną z komet okresowo odwiedzających Układ Słoneczny jest kometa Halleya, której okres obiegu $T = 76$ lat. Oblicz odległość, na jaką oddala się ona od Słonca, jeżeli mimośród jej orbity $e = 0.967$. Kiedy ostatni raz można było z Ziemi obserwować kometę Halleya gołym okiem? Kiedy będzie można ją ponownie zaobserwować bez użycia teleskopu?

Rozwiązanie Mimośród

$$e = \frac{c}{a} \tag{9}$$

i odległość d_{ap} komety od Słońca w aphelium wynosi

$$d_{ap} = c + a = ea + a = a(e + 1). \tag{10}$$

gdzie a jest długością wielkiej półosi elipsy.

Wykorzystując wyprowadzone z równania

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3 \tag{11}$$

trzecie prawo Keplera

$$\frac{T_Z^2}{a_Z^3} = \frac{T_{kH}^2}{a_{kH}^3} \tag{12}$$

gdzie T_Z i T_{kH} są okresami obiegu Słonca przez odpowiednio Ziemię i kometę Halleya oraz a_Z i a_{kH} są półosiami eliptycznych torów odpowiednio Ziemi i komety Halleya, możemy obliczyć maksymalną odległość komety Halleya od Słonca.

$$d_{ap} = \frac{c_Z}{e_Z}\left(\frac{T_{kH}}{T_Z}\right)^{2/3}(e_{kH} + 1) \tag{13}$$

Do równania (13) podstawiamy

- odległość Słońca od środka toru eliptycznego Ziemi $c_Z = 2.55 \cdot 10^9$m
- mimośród toru eliptycznego Ziemi $e_Z = 0.0167$

- mimośród toru eliptycznego komety Halleya $e_{kH} = 0.967$
- okres obiegu Słońca przez kometę Halleya $T_{kH} = 76$ lat
- okres obiegu Słońca przez Ziemię $T_Z = 1$ rok

i otrzymujemy odległość komety Halleya od Słońca w aphelium równą $5.38895 \cdot 10^{12}$ m.

Ostatni raz okiem nieuzbrojonym kometa Halleya była widoczna 9 lutego 1986, a następnym razem będzie widoczna 28 lipca 2061. Dane te podaje Wikipedia [3].

Zadanie 2.9 Mimośród orbity ziemskiej $e = 0.0167$, a odległość Słonca (ogniska) od środka elipsy to $c = 2.55 \cdot 10^9$ m. Oblicz różnicę odległości Słońce-Ziemia w peryhelium i aphelium.

Rozwiązanie Niech D_A oraz D_P oznaczaja odległości Słońce-Ziemia odpowiednio w aphelium i peryhelium. Wówczas różnica odległości Słońce-Ziemia w aphelium i peryhelium wyniesie

$$\begin{aligned} D_A - D_P &= a + c - (a - c) = 2c \\ &= 2 \times 2.55 \cdot 10^9 \text{ m} = 5.1 \cdot 10^9 \text{ m} \end{aligned} \tag{14}$$

Zadanie 2.10 Które z poniższych wyrażeń opisuje okres T obiegu sztucznego satelity po orbicie kołowej o promieniu R wokół planety o masie M?

a) $2\pi\sqrt{\frac{R^3}{MG}}$, b) $\frac{R}{\sqrt{MG}}$, c) $2\pi\frac{R^3}{\sqrt{MG}}$, d) $\frac{2\pi R}{MG}$

Rozwiązanie Rozwiązania w żadnym wypadku nie należy zgadywać. Zadanie należy rozwiązać i otrzymany wynik porównać z proponowanymi rezultatami.

Siła dośrodkowa powodująca utrzymanie satelity na orbicie wynosi

$$G\frac{Mm}{R^2} \tag{15}$$

i jest ona równa sile $F = ma$ jaka nadaje masie satelity m przyspieszenie dośrodkowe $a = v^2/R$ w ruchu po okręgu o promieniu R. Wykorzystując zależność $v = \omega R$ możemy napisać

$$G\frac{Mm}{R^2} = \frac{mv^2}{R} = \frac{m\omega^2 R^2}{R} \tag{16}$$

Dalej, ponieważ częstość kołowa w ruchu po okręgu $\omega = \frac{2\pi}{T}$ gdzie T jest okresem ruchu po okręgu, otrzymujemy

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM}{R^3} \tag{17}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \tag{18}$$

Rozwiązanie zadania jest zatem podane w odpowiedzi (a).

References

[1] Mimośród https://pl.wikipedia.org/wiki/Ekscentryczno%C5%9B%C4%87˙(fizyka)

[2] Peryhelium i aphelium https://pl.wikipedia.org/wiki/Peryhelium

[3] Kometa Halleya https://pl.wikipedia.org/wiki/Kometa˙Halleya

[4] Prędkość kosmiczna https://pl.wikipedia.org/wiki/Pr%C4%99dko%C5%9B%C4%87˙kosmiczna

[5] Świętosław Romanowski and Włodzimierz Wrona (1967) *Matematyka wyższa dla studiow technicznych* Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe

Pawel Jan Piskorz (paweljs@gmail.com)